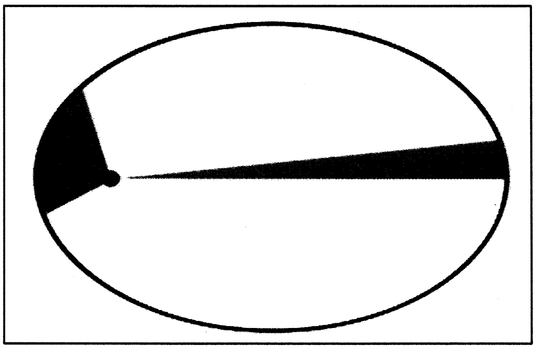
Geschwindigkeiten der Erde und zweites Keplersches Gesetz[1]

Kurven: Sektorflächen der Ellipse, Ableitung von Winkeln, Flächen und Kurvenvektoren

Zweites Keplersches Gesetz: Konstanz der Flächengeschwindigkeit[2]

In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl „Objekt – Gravizentrum" gleiche Flächen.

Die Konstanz der Flächengeschwindigkeit besagt, dass von einer gedachten Verbindungslinie zwischen Zentralkörper, genauer dem Schwerpunkt der beiden Himmelskörper, und einem Trabanten in gleichen Zeiten stets die gleiche Fläche überstrichen wird. Ein Planet bewegt sich also schneller, wenn er sich nahe an der Sonne befindet, und umso langsamer, je weiter er von der Sonne entfernt ist.[3]



(Quelle Text und Abbildung: http://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze)

Technische Parameter der Erdbahn

- Numerische Exzentrizität: $\epsilon = 0{,}0167$
- Ellipsenparameter p = 1.49558 * 10^{11} m
- Anomalistische Umlaufzeit: 3.156 * 10^{7} sec (= 365.2 Tage)
- Perihel: Sonnennächster Punkt mit Abstand 147.1 Mio km.
- Aphel: Sonnenfernster Punkt mit Abstand = 152.1 Mio km
- Grosse Ellipsen-Halbachse a = 1.496* 10^{11} m
- Kleine Ellipsen-Halbachse b = 1.49558* 10^{11} m

Mathematische Problemstellung: Mit Hilfe der Polardarstellung der Ellipse $r(\varphi) = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)}$ (Pol im Gravitationszentrum = Brennpunkt) lassen sich mit Hilfe von Sektorflächenformeln und des 2. Keplerschen Gesetzes Formeln für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ und die Geschwindigkeit $\dot{c}(t)$ (in der Einheit m/sec) herleiten sowie deren Extremalwerte analysieren und berechnen.

Es stellt sich die Frage, ob der Betrag von $\dot{c}(t)$ in den Scheitelpunkten minimal bzw. maximal ist.

---

[1] Die drei Keplerschen Gesetze bilden ein fundamentales, ideales Regelwerk der Astronomie und sind derzeit unter http://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze übersichtlich präsentiert. (Kepler formulierte das Gesetz nur für Planeten und die Sonne, es gilt aber für verschiedene Himmelskörper, auch solche auf nicht geschlossenen Bahnen.)

[2] Ideales 2-Körpersystem ohne relativistische Effekte.

[3] Dies bezieht sich zuerst offensichtlich auf die Winkelgeschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit in der Einheit m/sec folgt mit der Sektorformel in cartesischen Parameterkoordinaten mit Ursprung im Brennpunkt (Gravitationszentrum) folgender Zusammenhang: $\left|\dfrac{dA}{dt}\right| = const. = \dfrac{1}{2}\left|\det(c(t),\dot{c}(t))\right| = \dfrac{1}{2}\left|c(t)\right|\cdot\left|\dot{c}(t)\right|\cdot\left|\sin(\beta(t))\right|$ (β(t) bezeichnet den zeitabhängigen Winkel zwischen $\dot{c}(t)$ und $c(t)$. Daraus folgt bspw. für den Betrag der Geschwindigkeit: $\left|\dot{c}(t)\right| = \dfrac{2}{\left|c(t)\right|\cdot\left|\sin(\beta(t))\right|}$.

Hinweise:

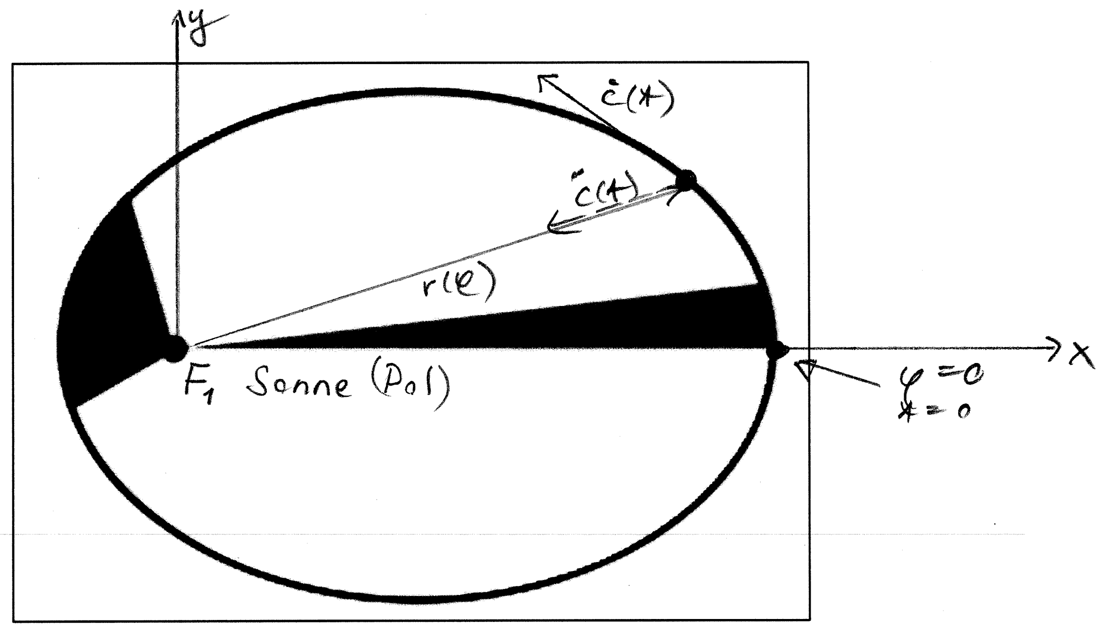
(1) Die Konstante (!) k := $\left|\dfrac{dA}{dt}\right|$ kann aus der Ellipsenfläche und der anomalistischen Umlaufzeit annähernd berechnet werden.

(2) Für die Herleitung einer Formel für $\dot{c}(t)$ verwende man die Zeitparametrisierung

$$c(t) := \begin{pmatrix} r(\varphi(t))\cos(\varphi(t)) \\ r(\varphi(t))\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Winkelgeschwindigkeit φ(t). Mit Hilfe der Kettenregel und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ lassen sich $\dot{c}(t)$ und $|\dot{c}(t)|$ berechnen.

(3) Extremalwerte von $|\dot{c}(t)|$ lassen sich am einfachsten durch Ableiten von $\dot{c}(t)\cdot\dot{c}(t)$ mittels Produktregel für das Skalarprodukt ohne konkrete Verwendung der Formeln von (2) bestimmen.



2. Keplersches Gesetz: $\dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \text{const.} \Rightarrow \dfrac{dA}{dt} = \text{const} =: k = \dfrac{\pi a b}{T}$

Sektorformel: $A(\varphi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\varphi} r^2(\hat{\varphi})\,d\hat{\varphi} = \dfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} \dfrac{p^2}{(1-\varepsilon\cos\hat{\varphi})^2}\,d\hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varphi} A(\varphi) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\frac{p^2}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

Nun: $k = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{dA}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{p^2}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}\dfrac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \underline{\dot{\varphi}(t) = \dfrac{2\pi a b}{T p^2}(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}$

(Differentialgleichung für die Winkelfunktion $\varphi(t)$.)

(2) $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} r'(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) + r(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\,(-\sin\varphi(t)) \\ r'(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) + r(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}$

$$|\dot{c}(t)|^2 = r'(\varphi(t))^2\,\dot{\varphi}(t)^2 + r^2(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)^2$$

$$= \frac{\cancel{p^2}\,\varepsilon^2 a^2 b^2 \pi^2 + \cancel{p^2} a^2 b^2 \pi^2 - 2\cancel{p^2} a^2 b^2 \pi^2\,\varepsilon\cos\varphi}{4T^2 \cancel{p^4}\, p^2}$$

(3) Extremalwerte

$$\frac{d}{dt}|\dot{c}(t)|^2 = \frac{d}{dt}\,\dot{c}\cdot\dot{c} = 2\,\dot{c}\,\ddot{c}$$

Dies ist 0 genau in den Hauptscheiteln $t=0 \vee t=\frac{1}{2}T$
$\varphi=0 \vee \varphi=\pi$ $\square$

Variante

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{(1-\varepsilon\cos(\varphi(t)))^2\,\pi a b}{2Tp^2}$$

Maximal, wenn $\cos(\varphi(t)) = -1 \Leftrightarrow \varphi(t) = \pi$
Minimal, " " $= +1 \Leftrightarrow \varphi(t) = 0$